## الفصل الرابع

## حساب التحولات

نفرض وسطاً متماثل الاتجاهات وغير متجانس السرعة $V(x,y,z)$ في كل نقطة منه $(x,y,z)$ مستقلة عن الاتجاه

سنحاول ايجاد الزمن اللازم لنقطة كي ترسم بهذه السرعة منحنياً $\ell$

ان المسافة الصغيرة $ds$ تقطع في زمن قدره $\frac{ds}{V}$ وبالتالي فإن المنحني يرسم بزمن معين بالتكامل التالي

$$T = \int_{\ell} \frac{ds}{V(x,y,z)} \quad (1)$$

لنثبت الطرفين $(x_0,y_0,z_0)$ و $(x_1,y_1,z_1)$ للمنحني $\ell$ ولنترك المنحني نفسه يتحول فيتحول المقدار $T$ [struck through] تبعاً لـ $\ell$

اذا اعطينا $\ell$ قيمة ما فيكون للتابعي $T$ قيمة عددية معينة

ان احد المسائل التي نلاحظ [?] في دراسة «الضوء الهندسي» هي التالية

اذا ثبتنا الطرفين $(x_0,y_0,z_0)$ $(x_1,y_1,z_1)$ للمنحني $\ell$ فالمطلوب تعيين $\ell$ بحيث يكون للتابعي $T$ قيمة صغرى

نعتبر $x$ كوسيط في معادلة المنحني $\ell$ فيكون $y$ و $z$ تابعين للوسيط $x$ عندئذ العلاقة (1) تأخذ الشكل التالي

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{V(x,y,z)}\, dx \quad (2)$$

فالمسألة ليست سوى البحث عن $z(x)$ و $y(x)$ بحيث يكون لـ $T$ قيمة صغرى بينما تحقق التابعات المطلوبة $z(x)$ و $y(x)$ الشروط التالية

$$y(x_0) = y_0 \qquad z(x_0) = z_0$$

$$y(x_1) = y_1 \qquad z(x_1) = z_1$$

وفي حالة مستوية فإن التابع (2) يأخذ الشكل التالي

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{V(x,y)}\, dx$$

بالشروط الموافقة

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

ان المسألة الاساسية في حساب التحولات ما هي الا البحث عن القيم العظمى والصغرى لتابعيات منحنيات وخصوصاً متكاملات محدودة

هذه المسألة تشبه في حساب التفاضل مسألة ايجاد القيم العظمى والصغرى

وترتبط المسألة الأخيرة كما نعلم بمسألة ايجاد القيم الصغرى لتابع ما مباشرة وهذا يعني البحث عن المتحولات المستقلة التي يأخذ من اجلها التابع اعظم او اصغر قيمة له بالنسبة لجميع القيم المجاورة

سنعالج المسألة في حالة التابعيات بطريقة مماثلة

Ex: في حالة التابعي

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{V(x,y,z)}$$

سنبحث عن المنحني $\ell$ بحيث تكون قيمة التابعي $T$ بالنسبة لهذا المنحني لا تزيد عن القيم المقابلة بالنسبة لكافة المنحنيات المجاورة كنهاية لـ $\ell$

اذا كان للتابعي من اجل منحني او سطح
ما قيم لا تتغير (او لانهائية) عن قيمة من
اجل جميع المنحنيات او السطوح
المجاورة فإننا نقول ببساطة ان التابعي
حقق قيمة مستقرة من اجل هذا المنحني او السطح

نظريات مهمة باستقرار

[1] النظرية الاولى: اذا كان $f(x)$ تابعاً
معيناً ومستمراً في المجال $[x_0, x_1]$ واذا
تحققت العلاقة $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\eta(x)\,dx$
من اجل كل تابع $\eta(x)$ مستمر هو ومشتقاته
الاولى ومعدوم في طرفي المجال اي اذا كان

$$\eta(x_0) = 0 \qquad \eta(x_1) = 0$$

عندئذ نثبت ان التابع $f(x)$ يكون مطابقاً
للصفر في ذلك المجال $f(x) = 0$

البرهان: من اجل برهان ذلك نفرض العكس
اي لنفرض ان $f(x)$ لا يطابق الصفر في نقطة
ما $x = \xi$ من المجال $[x_0, x_1]$ ولتكن
$f(\xi) > 0$

$x_0$ — $\xi_0$ — $\xi_1$ — $x_1$

ولما كان التابع $f(x)$ مستمراً فإنه موجب
في المجال $[\xi_0, \xi_1]$ حاوٍ للنقطة $\xi$ دوماً
داخل المجال $[x_0, x_1]$
لنعرف الآن التابع $\eta(x)$ على النحو الآتي

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & x_0 \le x \le \xi_0 \\ (x-\xi_0)^2 (x-\xi_1)^2 & \xi_0 \le x \le \xi_1 \\ 0 & \xi_1 \le x \le x_1 \end{cases}$$

ان التابع $\eta(x)$ يحقق جميع شروط النظرية

$$\eta(x_0) = 0 \qquad \eta(x_1) = 0$$

لأن الجداء $(x-\xi_0)^2(x-\xi_1)^2$ وجميع
مشتقاته بالنسبة لـ $x$ تنعدم عندما

$$x = \xi_0 \quad , \quad x = \xi_1$$

كما ان $\eta(x)$ يطابق الصفر خارج المجال $[\xi_0, \xi_1]$
اذا فالتابع $\eta(x)$ ومشتقاته مستمرة في
كامل المجال $[x_0, x_1]$ وبالتالي

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\eta(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi_0} f(x)\cdot 0\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi_1} f(x)(x-\xi_0)^2(x-\xi_1)^2\,dx + \int_{\xi_1}^{x_1} f(x)\cdot 0\,dx$$

$$= \int_{\xi_0}^{\xi_1} f(x)(x-\xi_0)^2(x-\xi_1)^2\,dx$$

وعليه فإن قيمة هذا التكامل موجبة اذ ان
التابع المكامل مستمر ومتحققة موجبة
داخل مجال التكامل ، الامر الذي يناقض
كون التكامل معدوماً حسب الفرض
اي ان $f(x)$ يطابق الصفر في المجال
$[x_0, x_1]$ وهو المطلوب

[2] المبرهنة الثانية: اذا كان $f(x,y)$ تابعاً معيناً ومستمراً في الساحة $B$ وانعدم التكامل $\iint_B f(x,y)\eta(x,y)\,dx\,dy = 0$ من اجل كل تابع $\eta(x,y)$ مستمر في $B$ هو ومشتقاته الاولى ومنعدم على المحيط $C$ لـ $B$ عندئذ التابع $f(x,y)$ يكون مطابقاً للصفر

البرهان: نفرض ان $f(x,y)$ لا يطابق الصفر وموجب في نقطة ما $(\xi_1,\xi_2)$ داخل الساحة $B$ فيوجب في هذه الحالة ان يكون موجباً في دائرة معينة مركزها $(\xi_1,\xi_2)$ ونصف قطرها $\rho$ واقعة داخل الساحة $B$

لنعرف التابع $\eta(x,y)$ على النحو الآتي

[redacted]

$$\eta(x,y)=\begin{cases} 0 & (x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2 \geq \rho^2 \\ [(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2-\rho^2]^2 & (x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2 < \rho^2 \end{cases}$$

في الواقع ان $\eta(x,y)$ يحقق شروط المبرهنة عندئذ

$$\iint_B f(x,y)\eta(x,y)\,dx\,dy = \iint_C [(x-\xi_1)^2+(y-\xi_2)^2-\rho^2]^2 f(x,y)\,dx\,dy$$

نحصل على مقدار موجب وهذا يناقض الفرض بالتالي $f(x,y)$ مطابق للصفر وهو المطلوب

معادلة اولر في الحالة البسيطة

لنأخذ التكامل الدالي ① $J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$ علماً ان $F$ تابع معطى بالنسبة لـ $x,y,y'$ ونفترض ان هذا التابع ومشتقاته حتى المرتبة الثانية مستمرة في الساحة $B$ في المستوي $(x,y)$ ومن اجل اية قيمة لـ $y'$

($y$ تابع لـ $x$ اي انه المشتقة بالنسبة لـ $x$) ونفرض ان $y=y(x)$ تعطي حلاً يجعل من التكامل الشروط التالية

② $y(x_0)=y_0 \qquad y(x_1)=y_1$

نرمز للمطلوب

اوجد الشروط التي يلزم ان يحققها التابع $y(x)$ لكي يكون للتابعي $J$ قيمة مفروضة او المطلوب ايجاد معادلة اولر

الحل: نأخذ اي تابع $\eta(x)$ منعدم في نهايتي مجال التكامل $[x_0,x_1]$ وبالاضافة الى $y(x)$ الذي يجب ان يؤدي الى قيمة مفروضة للتابعي $J$ نؤلف شكلاً تابعاً جديداً $y(x)+\alpha\eta(x)$ حيث $\alpha$ وسيط عددي صغير

ان هذا التابع الجديد يحقق نفس الشروط الحدية التي يحققها التابع $y(x)$ ونعوض هذا التابع الجديد في التابعي $J$ اي في العلاقة ① فإننا نحصل نتيجة للتكامل على تابع للوسيط $\alpha$

$$J(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x)+\alpha\eta(x), y'(x)+\alpha\eta'(x))\, dx$$

ولما كان $y(x)$ يعطي القيم القصوى للتابعي $J$ ، لذا فإن للتابع المعرف بالعلاقة (3) قيمة قصوى عندما $\alpha=0$

وبالتالي ينعدم مشتقه عندما $\alpha=0$ $J'(0)=0$

باشتقاق (3) بالنسبة لـ $\alpha$ مشيرين الى المشتقات بادلة نحصل على التالي

$$J'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x)+\alpha\eta(x), y'(x)+\alpha\eta'(x)]\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{d}{d(y+\alpha\eta)}\frac{d(y+\alpha\eta)}{d\alpha} + \frac{d}{d(y'+\alpha\eta')}\frac{d(y'+\alpha\eta')}{d\alpha}\right]$$

$$\cdot F[x, y(x)+\alpha\eta(x), y'(x)+\alpha\eta'(x)]\, dx$$

$$J'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1}[F_{(y+\alpha\eta)}(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')\eta(x)\, dx +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} F_{(y'+\alpha\eta')}(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')\eta'(x)\, dx$$

نجعل $\alpha=0$ نحصل على

$$J'(0) = \int_{x_0}^{x_1} F_y[x,y,y']\eta(x)\, dx +$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}[x,y,y']\eta'(x)\, dx$$

نكامل الحد الثاني في العلاقة الأخيرة بالتجزئة نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}[x,y,y']\eta'(x)\, dx = [F_{y'}\eta(x)]_{x_0}^{x_1} -$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\left[\eta(x)\frac{d}{dx}F_{y'}\right] dx$$

وبما أن $\eta(x)$ ينعدم في نهايتي المجال $[x_0, x_1]$

$$= -\int_{x_0}^{x_1}\left[\eta(x)\frac{d}{dx}F_{y'}\right] dx$$

$$J'(0) = \int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right] dx$$

ومن نظرية ما نستطيع القول أن التابع $y(x)$ الذي يعطي قيمة قصوى للتكامل (1) عندما $J'(0)=0$ يجب أن يحقق المعادلة التفاضلية الآتية

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

وتعرف هذه العلاقة بمعادلة أولر وهو الشرط الذي يجب أن يحقق $y(x)$ كي يكون للتابعي $J$ قيمة قصوى

ويمكن كتابة هذه المعادلة بشكل آخر

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y') = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}$$

$$= F_{xy'} + F_{yy'}y' + F_{y'y'}y''$$

عندئذ نستطيع أن نكتب معادلة أولر بالشكل

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y + F_{xy'} - F_y = 0$$

وهي عبارة عن معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad F_{xy'} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$F_{yy'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \qquad F_{y'y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$$

حالة توابع عديدة ذات مشتقات من المرتبة الأولى، وفي مراتب أعلى

1] دراسة حالة تابعين $y(x)$ و $z(x)$ والمشتق من المرتبة الأولى

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')\,dx \qquad (1)$$

السؤال: ما هي الشروط التي يجب أن يحققها التابعين $z(x)$ ، $y(x)$ كي يكون للتابع $J$ قيمة قصوى

البرهان: لنشكل تابعين جديدين من التابعين $y(x)$ و $z(x)$ على الشكل التالي

$$y(x)+\alpha\eta(x) \qquad z(x)+\alpha_1\eta_1(x)$$

بفرض أن $\eta_1(x)$ ، $\eta(x)$ تابعان كيفيان ينعدمان في نهايتي المجال $[x_0,x_1]$ نعوض هذين التابعين في (1) نحصل على

$$J(\alpha,\alpha_1)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\, y+\alpha\eta,\, y'+\alpha\eta',\, z+\alpha_1\eta_1,\, z'+\alpha_1\eta_1')\,dx \qquad (2)$$

وبما أن $y(x), z(x)$ يحققان القيم القصوى للتابعين $J$ لذا فإن التابع المعرف بالعلاقة (2) قيمة قصوى عندما $\alpha_1=0$ ، $\alpha=0$ وبالتالي ينعدم مشتقه بالنسبة لـ $\alpha$ وبالنسبة لـ $\alpha_1$ عندما $\alpha_1=0$ ، $\alpha=0$ على الترتيب

وبالاشتقاق تحت إشارة التكامل في العلاقة (2) بالنسبة لـ $\alpha$ وبالنسبة لـ $\alpha_1$ مساوين المشتقات بأدلة نحصل على التالي

(الاشتقاق بالنسبة لـ $\alpha$) ونعوض $\alpha_1=0$ ، $\alpha=0$

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha}=J_\alpha(\alpha,\alpha_1)=\int_{x_0}^{x_1}F_y\,\eta(x)\,dx+\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\,\eta'(x)\,dx$$

نكامل التكامل الثاني بالتجزئة

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\,\eta'(x)=\left[\eta(x)F_{y'}\right]_{x_0}^{x_1}-\int\eta(x)\frac{d}{dx}F_{y'}\,dx$$

$$J(0,0)=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right]\eta(x)\,dx$$

وبنفس الطريقة نجد أن $J_{\alpha_1}(0,0)$ يكتب بالشكل

$$F_{\alpha_1}(0,0)=\left[F_z-\frac{d}{dz}F_{z'}\right]\eta_1(x)\,dx$$

علماً أن $\eta_1(x)$ معدوم في نهايتي المجال $[x_0,x_1]$ وبالتالي كي يكون للتابعين $J$ قيمة قصوى يجب على التابعان $y(x)$ و $z(x)$ أن يحققا مجموعة المعادلتين التفاضليتين من المرتبة الثانية

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0$$